# Appariements sur le Marché du Logement

Gabriel Desgranges, Etienne Wasmer

ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 58 – 2000

# Appariements sur le marché du logement

**Gabriel DESGRANGES, Étienne WASMER ***

**RÉSUMÉ.** – Cet article souhaite contribuer à une théorie du marché du logement locatif où les frictions de recherche sont rendues endogènes par une fonction d'appariement entre propriétaires et locataires potentiels. Le loyer est déterminé par une négociation *à la Nash* entre propriétaires et locataires ou choisi par le propriétaire *ex ante*. L'introduction de frictions de recherche modifie largement les résultats traditionnels et la statique comparative de l'état stationnaire est menée dans cette perspective. On étudie, notamment, un équilibre de court terme (le cas d'une ville fermée) et un autre de moyen terme (le cas d'une ville ouverte où l'offre de logements est fixe et les travailleurs libres d'entrer, ou non, sur le marché). Dans les deux cas, on discute les conséquences d'une taxation des appartements vacants. On retrouve un résultat relativement général en présence de frictions importantes : les mesures qui tendent à protéger les agents d'un certain type (employés, locataires) le font au détriment de ceux qui aspirent à accéder à ce statut (chômeurs, personnes ayant des difficultés à se loger).

---

## Matching on the Housing Market and a Few Policy Implications

**ABSTRACT**. – This paper attempts to build a theory of rental housing markets in which search frictions are made endogenous by a matching function between landlords and agents willing to rent. The rent is determined either according to *a Nash-bargaining game* between landlords and tenants, or fixed *ex ante* by the tenant. In both cases, we discuss the impact of the taxation of vacant apartments and show that protecting the tenants has an adverse effect on the outsiders, as on the labor market.

* G. DESGRANGES : THEMA, Université de Cergy-Pontoise ; E. WASMER : ECARES, Université Libre de Bruxelles et CEPR.
Nous remercions G. DURANTON, Y. ZENOU, les participants à un atelier IRES/UCL, en particulier P. CAHUC, et deux rapporteurs anonymes pour leurs commentaires et suggestions.

# 1 Introduction

Le marché du logement locatif présente au moins deux aspects motivant l'introduction de frictions de recherche : l'information sur l'état de l'offre et de la demande n'est pas complète et, à tout moment, sont présents sur le marché à la fois des appartements à louer et des agents souhaitant louer un appartement. Ce dernier point n'implique pas forcément que l'information est incomplète, le rationnement pouvant être dû à un ajustement des prix insuffisant. Toutefois, on peut raisonnablement supposer qu'un *rationnement stochastique* qu'aucun ajustement par les prix n'élimine, est un déterminant important du taux de vacance.

Cet article essaie de modéliser le rationnement stochastique en introduisant des frictions de recherche à la fois pour les propriétaires et les agents cherchant un appartement (dénommés les travailleurs). De telles frictions sont parfois introduites sur le marché du logement. Dans le cas où les appartements sont occupés par leurs propriétaires, ROSENTHAL [1997], SOMMEZ [1996], TURNBULL et SIRMANS [1993] et YINGER [1981] font des contributions importantes. Pour le marché locatif, des modèles de prospections sont utilisés par READ [1997, 1993, 1991, 1988], VAN OMMEREN *et al.* [1997], ANAS [1997] et THIES [1993].

Nous nous différencions de la littérature existante en recourant à une technologie d'appariement, dans l'esprit de WHEATON [1990]. Celle-ci est l'équivalent d'une fonction de production dont le produit est le nombre de contacts entre les agents. L'introduction d'une telle technologie est motivée par une analogie avec la littérature du marché du travail. Celle-ci a connu une première génération de modèles de prospection dans lesquels la distribution des offres d'emploi et les probabilités de transitions sont exogènes. Les modèles d'appariement (*i.e.* incluant une fonction d'appariement) appartiennent à une deuxième génération de modèles de prospection car les probabilités de transition sont endogènes et dépendent notamment des variables du marché, par exemple de la tension du marché, mesurée par le ratio du nombre d'offres d'emplois sur celui des chômeurs. En outre, le nombre d'offres d'emploi est endogène et résulte de la maximisation du profit des entreprises. Or, toutes les contributions à la compréhension des marchés du logement citées ci-dessus, à l'exception notable de WHEATON [1990], correspondent à la première génération, c'est-à-dire que les offres sont exogènes. Si la tension du marché varie dans le temps ou dans l'espace, ces modèles s'avèrent incapables de tenir compte des difficultés à échanger plus ou moins grandes rencontrées par les agents.

L'existence d'une fonction d'appariement à rendements d'échelle constants (entre les chômeurs et les emplois innocupés) est démontrée empiriquement pour les marchés du travail (PISSARIDES [1986], BLANCHARD et DIAMOND [1989] notamment) et cette fonction se révèle être un instrument théorique des plus utiles pour analyser à la fois le chômage d'équilibre et ses propriétés cycliques. Nous ne connaissons aucune justification empirique de l'existence d'une telle fonction sur le marché du logement locatif entre propriétaires et travailleurs, mais suggérons qu'il y a là une piste empirique à explorer. Dans ce travail, nous souhaitons simplement introduire un outil théorique et interpréter les propriétés de l'équilibre en gardant présent à l'esprit qu'il ne s'agit, à ce stade, que d'une construction théorique, dont nous souhaitons qu'elle soit féconde. La technologie d'appariement nous semble bien adaptée aux marchés de logements. C'est, en effet, lorsque l'hétérogénéité entre deux groupes d'agents est importante qu'il est pertinent que la probabilité d'appariement dépende positivement du nombre des agents de l'autre groupe. Nos résultats demeurent valables dans le cas limite où la technologie d'appariement devient si efficace que les frictions disparaissent [1].

Seul le marché locatif est étudié et nous ignorons toute interaction éventuelle entre ce marché et celui des appartements habités par leurs propriétaires. Il s'agit donc d'une analyse partielle que la division des tâches adoptée par la littérature justifie en partie. En outre, l'indépendance des deux marchés est une hypothèse réaliste tant que les travailleurs ont un accès imparfait au marché du crédit [2]. Enfin, WHEATON [1990] ne se préoccupe pas de ce marché et cette étude restait donc à faire.

Outre le marché étudié, notre travail se distingue de celui de WHEATON sur d'autres points importants. Son analyse est de court terme alors que la nôtre inclut un moyen terme et une forme possible de long terme. Sa fonction d'appariement est un cas particulier de la nôtre. Il suppose que les ménages doivent acheter une nouvelle maison avant de vendre la leur alors que nous supposons que les travailleurs cherchant une location viennent de l'extérieur (d'une autre ville par exemple). Ceci implique que son modèle est restreint aux cas où le nombre d'appartements est supérieur à celui des agents, à la différence du nôtre qui permet de traiter tous les cas. Finalement, le point le plus important est que nous introduisons explicitement une hétérogénéité des appartements qui entraîne une dispersion des loyers. Cette hétérogénéité vise à représenter les différences spécifiques de qualité des appartements (orientation, superficie, etc.) mais aussi les différences résultant de la situation de chaque appartement par rapport à d'autres éléments (distance au centre impliquant l'existence de coûts de transports).

Pour ces raisons, nous ignorons deux aspects importants considérés par WHEATON : l'endogénéité des intensités de recherche des travailleurs et les changements stochastiques de taille de la famille [3]. Cependant, ils pourraient être intégrés à notre analyse et nous laissons ce point pour une recherche ultérieure. Notre approche concerne plutôt la détermination du loyer. En effet, dès lors qu'un appariement a été réalisé entre un propriétaire et un travailleur, les deux agents sont dans une situation de monopole/monopsone. Ceci suggère que le surplus engendré par l'appariement n'est pas approprié par un agent

---

1. Le marché du logement possède une spécificité fondamentale qui est que la position dans l'espace d'un agent dépend de celles de tous les autres. Ceci engendre certains effets que notre transposition du marché du travail ne reproduit pas aisément. Il s'agit là certainement d'une extension à réaliser ultérieurement. Sur ce point important, voir GRIMAUD [1990].

2. Si ce n'est pas le cas, la situation est plus complexe et il est possible que, dans le long terme, la somme actualisée des loyers égale le prix de l'appartement, lui-même égal au coût de construction de l'appartement. Le loyer est alors déterminé sur le marché de l'achat de logements.

3. On peut tenter d'interpréter une partie des destructions d'appariement exogènes par un changement de taille de la famille. La « *nouvelle* » famille rejoindrait alors l'ensemble des travailleurs à la recherche d'une location. Cette modélisation d'un changement de taille ne prend, cependant, pas en compte toute la complexité des phénomènes à l'œuvre, pour des raisons de simplicité.

exclusivement mais partagé par les deux agents. Plus précisément, le premier cas présenté suppose que les deux agents partagent le surplus selon un processus de négociation *à la Nash*. En pratique cependant, on observe que les loyers sont annoncés *ex-ante* par les propriétaires (agissant ainsi comme des *leaders de Stackelberg*). Par conséquent, on étudie aussi le cas d'une concurrence en prix *à la Bertrand*. On montre que celle-ci s'identifie à la négociation *à la Nash* dans le cas où le pouvoir de négociation des locataires est nul, *i.e.* les propriétaires s'approprient tout le surplus.

Le résultat le plus important de notre approche, par rapport à la littérature urbaine standard, est que des travailleurs identiques *ex ante* ont des niveaux d'utilité *ex post* distincts, en raison de l'existence de frictions de recherche. En effet, le loyer ne reflète que partiellement les différences entre les flux d'utilité procurés par les appartements. Ce résultat tranche par rapport à l'équilibre standard où les loyers sont déterminés par une enchère dans un marché sans friction et où ils reflètent exactement la différence entre appartements, égalisant ainsi les niveaux d'utilité des travailleurs.

L'article est organisé comme suit. La section 2 développe le modèle et les valeurs des différents états des agents dans un état stationnaire sont calculées. La section 3 étudie les propriétés du loyer quand il est négocié suivant une procédure *de Nash*, puis par une concurrence *à la Bertrand* entre propriétaires. La section 4 complète le modèle de deux façons différentes, correspondant respectivement au court terme et au moyen terme. Un équilibre de long terme est brièvement présenté, il est résolu en annexe. La section 5 se compose d'exercices de statique comparative et de remarques de conclusion. Elle discute, en particulier, des implications de la taxation des appartements vacants. Outre le cas de long terme, l'annexe inclut les preuves trop importantes pour figurer dans le corps du texte.

# 2 Premiers éléments du modèle

On développe un modèle d'équilibre partiel du marché du logement avec frictions de recherche. Les frictions sont rendues endogènes par l'introduction d'une fonction d'appariement. Celle-ci correspond à une recherche passive car, l'effort de recherche n'étant pas modélisé, la distribution des appariements est exogène.

## 2.1 Le processus d'appariement

La géographie de la ville est représentée par un segment $[0, A]$. Il y a deux catégories d'agents que, par analogie avec la distinction capitalistes/travailleurs, on appellera des propriétaires (absents) et des travailleurs. Ils sont représentés par un *continuum* $[0, A]$ de propriétaires uniformément distribué dans la ville (et par conséquent complètement identifié à elle) et un *continuum* $[0, W]$ de travailleurs. Les deux segments sont munis de la mesure *de Lebesgue*. Un propriétaire loue l'appartement ou cherche un locataire. Un travailleur est locataire ou cherche une location. Les travailleurs sont *ex ante* identiques et demandent un appartement (l'élasticité de la demande est nulle). Les propriétaires possèdent un appartement et essaient de le louer. Par conséquent, en notant $i$ la position d'un appartement dans la ville, les états possibles d'un agent sont : posséder l'appartement loué $i$ ("*occupied*"), chercher à louer l'appartement $i$ ("*vacant*"), être locataire de l'appartement $i$ ("*tenant*"), chercher une location ("*search*"). On note $O_i$, $V_i$, $T_i$ et $S$ respectivement la valeur actualisée de ces quatre états.

On adopte les hypothèses standards des modèles d'appariement. S'il y a $s$ travailleurs cherchant un appartement (ou, précisément, un ensemble de mesure $s$) et $v$ appartements vacants, alors on suppose :

***Hypothèse 1***. Par unité de temps, le nombre d'appariements est une fonction à rendements d'échelle constants des variables $(s,v)$, notée $x(s,v)$ avec $x_s > 0$, $x_v > 0$, $x_{ss} < 0$, $x_{vv} < 0$, et aussi $x(1,+\infty) = x(+\infty,1) = +\infty$, $x(1,0) = x(0,1) = 0$.

Il s'ensuit que le taux d'arrivée des offres aux travailleurs à la recherche d'une location est : $\lambda = x(s,v)/s$ et le taux d'arrivée des travailleurs en recherche aux propriétaires est[4] : $q = x(s,v)/v$. Avec la notation $\theta = v/s$ qui représente la tension du marché du logement, on a alors :

$$q = q(\theta) = x(1/\theta,1)$$
$$\lambda = \lambda(\theta) = x(1,\theta)$$

En outre, $q$ (resp. $\lambda$) est une fonction strictement décroissante (resp. croissante) vérifiant : $q(0) = +\infty$; $q(+\infty) = 0$ ; $\lambda(0) = 0$ ; $\lambda(+\infty) = +\infty$. Plus la tension du marché est forte, plus l'appariement est probable pour les travailleurs et moins il l'est pour les propriétaires. Si, par exemple, $x(s,v) = x_0.s^{\alpha}v^{1-\alpha}$, alors le rythme auquel un propriétaire trouve un travailleur est $q = x_0.\theta^{-\alpha}$. Cette probabilité est indépendante de la tension quand $\alpha = 0$. La probabilité avec laquelle un travailleur trouve un appartement est indépendante de la tension $\theta$ quand $\alpha = 1$. Les autres valeurs de $\alpha$ correspondent à des cas intermédiaires.

REMARQUE 1. Les définitions de $q$ et de $\lambda$ ci-dessus supposent implicitement que les distributions sur $[0,A]$ et sur $[0,W]$ sont uniformes. Par conséquent, la formation d'un appariement entre les agents est indépendante de la position $i$ de l'appartement et de toute autre caractéristique des agents. En outre, l'hypothèse d'agents infinitésimaux fait que les agents considèrent $\theta$ donné, ils sont « preneurs de tension » (par analogie avec l'expression preneurs de prix).

4. La chronologie correspondante est la suivante : à chaque date $t$ (en temps continu), pendant la période $dt$, un travailleur cherchant une location (resp. un propriétaire dont l'appartement est vacant) a une probabilité $\lambda dt$ (resp. $qdt$) d'être apparié.

***Hypothèse 2***. La distribution des appariements est la distribution uniforme sur l'ensemble des agents en train de chercher.

Un appariement se conclut soit par l'entrée du travailleur dans le logement (le loyer est fixé selon la règle détaillée dans la section 3) soit par la séparation des deux agents sans qu'aucun contrat n'ait été établi. Ceux-ci continuent alors de prospecter le marché.

REMARQUE 2. Les appartements peuvent être vacants pour deux raisons :
• aléatoirement, selon une distribution uniforme sur $[0, A]$, en raison de la rotation exogène,
• systématiquement, car les agents appariés ne s'entendent jamais sur les termes d'un contrat de location.

***Hypothèse 3*** (pas de locataire prospecteur). Aucun locataire ne cherche une location plus avantageuse.

En outre, par cohérence avec des règlements fréquents des marchés du logements, on suppose qu'aucun propriétaire ne peut remplacer son locataire par un autre (ou, le remplace à un coût tel que ce n'est jamais une stratégie d'équilibre).

## 2.2 **Notations**

On adopte les notations suivantes : $r$ est le taux d'actualisation des agents, $c_i$ le flux du coût de la possession de l'appartement $i$, $t$ le flux de coût homogène supplémentaire résultant de la possession d'un appartement vacant (taxation ou coût de recherche par exemple), $z > 0$ tout flux d'utilité indépendant de la location et $u_i$ le flux d'utilité des travailleurs résultant de la location de $i$.

Une remarque importante est que $u_i$ dépend de la position $i$ de l'appartement. Il y a (au moins) deux interprétations possibles de cette hétérogénéité en économie urbaine. La première est en termes de caractéristiques spécifiques : les appartements, quelle que soit leur position, diffèrent selon la superficie, l'orientation, l'équipement, l'ancienneté, etc., et donc procurent une utilité plus ou moins élevée à leurs habitants, comme le font des biens différenciés. La seconde interprétation est en termes de caractéristiques publiques : la position des appartements, repérée par l'indice $i$, détermine la distance aux centres d'emploi, de commerce, aux différents équipements publics etc., et elle détermine donc aussi les coûts payés par les locataires de l'appartement $i$. Selon cette seconde interprétation, la distribution des $u_i$ aurait une forme spécifique, une fonction affine de la distance au centre-ville par exemple (ZENOU [1999]). Selon la première, la distribution des $u_i$ peut être quelconque. On ne privilégie aucune de ces deux interprétations et on donne seulement à la distribution des $u_i$ les propriétés suivantes :

***Hypothèse 4***. La distribution des $u_i$ a pour support $\left[\underline{u}, \overline{u}\right]$ avec $\underline{u} > z$. Elle admet une densité $\mu$ qui est une fonction deux fois continuement dérivable.

La condition $\underline{u} > z$ évite que certains appartements ne soient systématiquement vacants pour la raison triviale que les travailleurs préféreraient continuer à chercher plutôt que d'occuper gratuitement ces appartements [5].

## 2.3 État stationnaire

Un événement de probabilité exogène $\delta$ détruit les appariements conclus et installe les travailleurs à un niveau d'utilité $\bar{U}$. Ce paramètre $\delta$ peut être considéré comme traduisant un choc démographique (départ en retraite, naissance, mariage, etc.), un voisinage perturbateur ou une offre d'emploi extérieure à la ville. Pour définir un état stationnaire, on impose que les agents se retirant du marché soient remplacés par un nombre égal de nouveaux agents.

DÉFINITION 2.1 Un état stationnaire est caractérisé par une fonction $R_i = R(u_i)$ associant à chaque appartement $i$ le loyer $R_i$ (et éventuellement le niveau d'utilité minimum à partir duquel les appartements peuvent trouver un locataire), des quantités $W$ de travailleurs et $A$ d'appartements telles que les valeurs présentes actualisées des états des agents soient stationnaires, *i.e.* égales à $S, T_i, V_i, O_i$ définies par les équations :

$$rS = z + \lambda(\theta).E[\mathrm{Max}(T_i - S), 0] + \delta(\overline{U} - S) \tag{2.1}$$

$$rT_i = u_i - R_i + \delta(\overline{U} - T_i) \tag{2.2}$$

$$rV_i = -c_i - t + q(\theta)(O_i - V_i) \tag{2.3}$$

$$rO_i = -c_i + R_i + \delta(V_i - O_i) \tag{2.4}$$

où $E$ est l'espérance suivant la distribution uniforme des appartements vacants et $\lambda(\theta)$ et $q(\theta)$ sont les probabilités d'appariement respectivement d'un travailleur et d'un propriétaire. Celles-ci sont caractérisées par :

$$\lambda(\theta) = \delta \frac{A - W\theta}{W - A} \tag{2.5}$$

$$q(\theta) = \frac{\delta}{\theta} \frac{A - W\theta}{W - A} \tag{2.6}$$

Cette définition, assez longue, appelle plusieurs commentaires.

1) Elle caractérise seulement la stationnarité des flux : les anticipations sont communes à toute la population et stationnaires et les équations (2.1) à (2.4) sont les conditions de premier ordre des programmes d'optimisation des agents écrites en supposant la réalisation d'un état stationnaire (voir après).

5. L'hypothèse de dérivabilité de $\mu$ implique, en particulier, l'absence de masse atomique, condition technique nécessaire à l'existence de distributions stationnaires (distributions de loyers notamment).

2) Mais la définition n'inclut ni règle de formation des prix, ni hypothèse de rationalité des agents : la règle de détermination du loyer (le choix de la fonction $R_i = R(u_i)$) n'est pas précisée à ce stade, elle le sera dans la section 3. Les tailles des populations $W$ et $A$ peuvent être exogènes ou rendues endogènes en écrivant une condition de libre entrée des agents (section 4 et annexe).

3) Enfin, la définition est bien posée. En effet, la tension du marché $\theta = v/s$, les quantités d'appartements vacants $v$, de travailleurs à la recherche d'une location $s$ et d'appartements occupés (et de locataires) $o$ sont constantes. Ceci implique que les probabilités $\lambda$ et $q$ sont solutions des équations :

$$\lambda.s = \delta.o \tag{2.7}$$

$$q.v = \delta.o \tag{2.8}$$

La première égalise le taux d'entrée des travailleurs dans les appartements au taux de départ des locataires. La seconde égalise le taux auquel les appartements vacants se remplissent au taux auquel se libèrent les appartements occupés. Ces équations sont équivalentes aux conditions (2.5) et (2.6) de la définition (en remarquant $o = W - s = A - v$). *Elles admettent une unique solution* (*i.e.* une unique valeur de $\theta$, $\lambda$, $q$, $v$, $s$ et $o$, voir la section 4).

L'équation (2.1) signifie que le flux de revenu équivalent à l'état de recherche est la somme de l'utilité dans cet état $z$ et du rendement espéré de la prospection. Ce rendement espéré est lui-même la somme des deux termes suivants : le produit de la probabilité de transition $\lambda(\theta)$ de trouver un appartement par l'augmentation anticipée d'utilité qui résulte de l'appariement (qui est nulle si l'appartement n'est pas acceptable, *i.e.* $T_i - S < 0$) et le produit de la valeur $\overline{U}$ par la probabilité de transition correspondante $\delta$. Les équations suivantes sont similaires. L'équation (2.2) donne la valeur actualisée espérée d'être locataire au lieu $i$, qui est une fonction croissante de la différence entre l'utilité $u_i$ et le loyer $R_i$. L'équation (2.3) donne la valeur actualisée des flux de revenus d'un propriétaire cherchant à louer son appartement, lorsqu'il paye un coût $c_i$ d'entretien du logement, et qu'il s'acquitte de la taxe sur les logements vacants $t$. Enfin, l'équation (2.4) donne la valeur actualisée espérée des revenus d'un propriétaire qui loue son appartement pour un loyer $R_i$ et qui paie également le coût $c_i$.

L'équation (2.1) implique une espérance sur l'ensemble des appartements que les travailleurs acceptent de louer. Or, à un état stationnaire, cet ensemble est constant au cours du temps et, en raison des hypothèses 2 et 4, la distribution des appartements effectivement loués à la date $t$ est constante au cours du temps et est, en fait, identique à la distribution des appartements potentiellement loués. En conséquence, on peut définir précisément les valeurs *d'équilibre* :

$$\begin{aligned} T^e &= E\left[T_i\right] \\ u^e &= E\left[u_i\right] \\ R^e &= E\left[R_i\right] \end{aligned}$$

où $E$ est l'espérance calculée suivant la distribution uniforme sur l'ensemble des appartements pouvant trouver un locataire à l'état stationnaire. $T^e$, $u^e$, $R^e$

sont constants à l'état stationnaire et sont *à la fois les valeurs moyennes sur l'ensemble des appartements effectivement loués que les anticipations de ce qu'un travailleur à la recherche d'un appartement peut obtenir*. Ces trois grandeurs sont endogènes (moyennes uniformes sur des ensembles définis de façon endogène) et $E[\mathrm{Max}(T_i - S),0] = T^e - S$.

À partir des équations (2.1) à (2.4), on obtient alors :

$$T^e - S = \frac{u^e - R^e - z}{r + \delta + \lambda} \tag{2.9}$$

Par conséquent le modèle à l'état stationnaire se réduit aux deux équations suivantes :

$$T_i - S = \frac{1}{r + \delta}\left[u_i - z - R_i - \frac{\lambda}{r + \delta + \lambda}(u^e - z - R^e)\right] \tag{2.10}$$

$$O_i - V_i = \frac{R_i + t}{r + \delta + q} \tag{2.11}$$

Les équations (2.10) et (2.11) sont les gains de l'appariement (pour le propriétaire $i$ et le locataire de l'appartement $i$) en fonction du loyer $R_i$ de $i$ et du loyer moyen $R^e$.

# 3 Détermination du loyer

Le point crucial du modèle est la détermination du loyer. En économie urbaine, le loyer est le résultat d'une enchère entre agents. Ici, en raison des frictions, le marché n'est pas concurrentiel et l'appariement entre un propriétaire et un travailleur engendre un surplus, qui est en général partagé par une négociation. Cet aspect de négociation peut sembler *a priori* peu adapté au cas du marché du logement locatif. Pourtant, il arrive fréquemment que la discussion entre le propriétaire et le locataire potentiel amène, soit à une révision du loyer annoncé, soit à des travaux (peinture, tapisserie) améliorant le confort de l'appartement. Ce type de résultat est typique d'un mécanisme de négociation, qu'un modèle sans frictions ne peut, en général, pas reproduire.

On adapte donc ici les deux mécanismes les plus communs dans la littérature du marché du travail. Le premier est le partage du surplus engendré par un appariement par une négociation *à la Nash* entre le propriétaire et le travailleur. Le second est analogue à celui de BURDETT et MORTENSEN [1989]. C'est une concurrence en prix entre les propriétaires et on va montrer qu'il revient en fait à la négociation *à la Nash* dans le cas où le pouvoir de négociation des travailleurs est nul.

On détermine d'abord le profil des loyers d'un état stationnaire pour toutes probabilités d'appariement $q$ et $\lambda$ données. Le calcul complet de l'état stationnaire, qui inclut $\theta$, les probabilités correspondantes $q(\theta)$ et $\lambda(\theta)$ et le nombre d'appartements vacants et de travailleurs en recherche, est reporté à la section 4. Puisque tous les agents sont preneurs de $\theta$, ces deux parties peuvent, en effet, être traitées successivement.

## 3.1 La solution unique d'une négociation *à la Nash*

Le loyer est fixé après qu'un appariement a eu lieu, entre le propriétaire et le locataire potentiel selon une négociation *à la Nash*. Le surplus est partagé par le choix de $R_i$ entre les deux agents et leurs points de menace sont respectivement $V_i$ et $S$. Pour tout appartement $i$, $R_i$ résulte donc de la maximisation du produit $(T_i - S)^{\beta}(O_i - V_i)^{1-\beta}$ par rapport à $T_i$ et $O_i$, en considérant les points de menace comme donnés ($T_i > S$ et $O_i > V_i$). Le paramètre $\beta$ reflète le pouvoir de négociation relatif des locataires ($0 < \beta < 1$). On rappelle que ce procédé reçoit plusieurs justifications théoriques, il donne, par exemple, la même solution qu'un jeu *de Rubinstein* (voir OSBORNE et RUBINSTEIN [1990]).

Les points de menace sont endogènes puisqu'ils dépendent des valeurs moyennes anticipées de l'utilité $u^e$ et du loyer $R^e$ et aussi de $\lambda$ et $q$ (déterminées par la tension sur le marché $\theta$). Le lemme suivant établit qu'à un état stationnaire, un appariement se conclut par un contrat de location dès que les points de menace sont suffisamment bas pour que le surplus associé soit positif.

LEMME 3.1. Sous les hypothèses 1 à 4, à un état stationnaire associé à des probabilités d'appariement $q > 0$ et $\lambda > 0$ et à une valeur moyenne anticipée $u^e$ du flux d'utilité obtenu par un travailleur, l'appariement entre le propriétaire $i$ et un travailleur est accepté par les deux agents si et seulement s'il est accepté par un seul, si, et seulement si, le loyer $R_i$ satisfait :

$$R_i > -t$$

Si l'appariement est accepté, le loyer est fixé à :

$$R_i = \phi(u_i - u^e) + R^e \tag{3.1}$$

où la moyenne $R^e$ des loyers s'établit à :

$$R^e = K_1(u^e - z + t) - t \tag{3.2}$$

avec la pente $\phi$ et le coefficient $K_1$ égaux à :

$$\phi = \frac{(1-\beta)\,(r+\delta+q)}{r+\delta+(1-\beta)q} \in [0,1]$$

$$K_1 = \frac{(1-\beta)(r+\delta+q)}{r+\delta+\beta\lambda+(1-\beta)q} = \frac{1-\beta}{1+\dfrac{\beta(\lambda-q)}{r+\delta+q}} \in [0,1]$$

***Preuve***. Voir en annexe A.1. ■

On souligne les points suivants :

• Pour un $\theta$ donné, un état stationnaire est caractérisé par un flux d'utilité moyen anticipé $u^e$ ou, de façon équivalente, par un loyer moyen anticipé $R^e$ puisque l'un ou l'autre de ces termes détermine à la fois la distribution de loyers dans la ville et l'acceptation d'un appariement.

• La dispersion des loyers dans la ville est plus faible que celle des utilités $u_i$ puisque le terme $\phi$ est inférieur à 1. Avec $\beta = 0$, $\phi$ vaut 1 : les propriétaires s'approprient l'intégralité du surplus. En particulier, si $u_i$ *reflète des coûts de déplacement* augmentant de façon linéaire avec la distance au centre, alors le loyer est aussi une fonction affine décroissante de la distance au centre mais avec une pente moins forte que celle de $u_i$. Ce résultat ne correspond pas à l'équilibre urbain standard, pour des raisons exposées en section 5.

• Dans l'autre cas limite $\beta = 1$, $\phi$ vaut 0 : le loyer est négatif ($R_i = -t$), le propriétaire fait des pertes en louant son appartement et il est indifférent entre louer et continuer de chercher ($V_i = O_i$). Une stratégie possible du propriétaire pourrait être de se retirer du marché pour épargner les coûts de recherche $t$. On travaille donc sous la contrainte $V_i \geqslant 0$.

• $\phi$ est une fonction décroissante de $\delta$ et croissante de $q$ : plus les locataires sont susceptibles de partir et plus il est difficile pour un propriétaire de trouver un locataire, moins le profil des loyers correspond à celui des utilités.

• Enfin, la condition d'acceptation est la même pour les deux types d'agents : chaque fois que le surplus est positif, les deux agents parviennent à un accord et se partagent le surplus.

Dans le lemme 3.1, la condition d'acceptation de l'appariement est exprimée en termes du loyer négocié $R_i$ et pas directement des caractéristiques d'utilité de l'appartement ($u_i$) et de la ville ($u^e$). Le lemme technique suivant traduit la condition $R_i > -t$ en termes de ces deux grandeurs.

LEMME 3.2. Sous les hypothèses 1 à 4, à un état stationnaire associé à des probabilités $q > 0$ et $\lambda > 0$, un appartement est loué si, et seulement si :

$$u_i \geqslant \underline{U}(u^e) \tag{3.3}$$

où $\underline{U}$ est une fonction affine par morceaux et croissante du flux d'utilité anticipé $u^e$ définie par :

$$\underline{U}(u^e) = \max\left[\underline{u}, u^e - K_2\left(u^e - z + t\right)\right] \tag{3.4}$$

avec le coefficient $K_2$ égal à :

$$K_2 = \frac{r + \delta + (1-\beta)q}{r + \delta + \beta\lambda + (1-\beta)q} \in [0,1]$$

Ce lemme établit un résultat sous-jacent au lemme précédent. À un état stationnaire, un appartement peut être loué lorsque les travailleurs l'associent à un flux d'utilité suffisamment important et l'utilité minimum permettant la location est une fonction croissante de l'utilité moyenne. Par conséquent, une *grande hétérogénéité des appartements implique que certains d'entre eux ne sont jamais loués* (en raison de l'homogénéité *ex ante* des agents).

On peut remarquer que $\underline{U}$ est définie sur $\left[\underline{u},\bar{u}\right]$ et à valeurs dans $\left[\underline{u},\underline{U}\left(\bar{u}\right)\right]$ et que $\underline{U}\left(\bar{u}\right) < \bar{u}$ puisque $u_i - z + t > 0$ pour tout $u_i$.

***Preuve***. Le résultat est une conséquence immédiate de la condition nécessaire et suffisante du lemme 3.1 et de quelques calculs à partir de l'équation. ■

Une augmentation de la dispersion des $u_i$ à moyenne constante, une augmentation de $t$ ou une diminution de $z$ rendent plus facile la violation par un $i$ de la condition (3.3) et tendent à accroître le taux de vacances. Il s'agit d'un rationnement supplémentaire qui n'est pas dû aux frictions mais à l'absence d'un loyer d'équilibre pour certains appartements.

On est maintenant en mesure de donner la distribution des loyers.

PROPOSITION 3.3. Sous les hypothèses 1 à 4, si la distribution des flux d'utilité $u_i$ dans la ville satisfait :

$$\forall u \in \left[\underline{u},\overline{u}\right], \mu\left(u\right) \leqslant \frac{1}{\overline{u}-u}\int_u^{\overline{u}} \mu(x)dx \tag{3.5}$$

alors, pour tout $q$ et $\lambda$, lorsque le loyer est fixé par une négociation *à la Nash*, il y a un unique état stationnaire. Dans cet état stationnaire, tous les appartements peuvent être loués si, et seulement si, la distribution des $u_i$ satisfait :

$$\underline{u} \geqslant Eu_i - K_2\left(Eu_i - z + t\right) \tag{3.6}$$

où $Eu_i$ est la moyenne (exogène) des flux d'utilité sur l'ensemble des appartements.

Puisque $T_i$ dépend de $i$ et plus précisément croît avec $u_i$ (on le vérifie aisément), certains locataires peuvent être incités à chercher un meilleur appartement. Cette possibilité est exclue par l'hypothèse 4. La condition (3.5) est, par exemple, vérifiée pour la distribution uniforme. Lorsqu'elle n'est pas vérifiée, il y a toujours au moins un état stationnaire (par continuité de l'application $\mathcal{T}$, définie en A.2 voir la preuve) mais il est possible qu'il y en ait plusieurs. Enfin, la condition (3.6) signifie que tous les appartements sont suffisamment attrayants par rapport à l'appartement moyen pour mériter un loyer supérieur à $-t$.

***Preuve***. Voir en annexe A.2. ■

Le corollaire suivant détermine les variations avec les paramètres de l'économie du flux minimum d'utilité obtenu par un locataire et du flux moyen d'utilité à l'état stationnaire.

COROLLAIRE 3.4. À un état stationnaire, on note $\underline{U}^\circ = \underline{U}(u^e)$. Si $\underline{U}^\circ > \underline{u}$, *i.e.* certains appartements ne sont jamais loués, alors :

$$\frac{d\underline{U}^\circ}{dK_2} < 0$$

$$\frac{du^e}{dK_2} < 0$$

Le paramètre $K_2$ n'a pas d'interprétation particulière mais il résume l'impact des variations de $\beta$, $q$, $\lambda$, $\theta$, $r$ et $\delta$ par exemple. Ainsi $K_2$ est une fonction croissante de $q$, $r$ et $\delta$ et décroissante de $\beta$, $\lambda$ et $\theta$. On obtient en particulier, $\frac{d\underline{U}^\circ}{d\beta} > 0$ et $\frac{du^e}{d\beta} > 0$ : augmenter le pouvoir de négociation des locataires accroît $\underline{U}^\circ$.

***Preuve***. L'équation (A.2) en annexe s'écrit à l'état stationnaire :

$$du^e = \frac{\mu(\underline{U}^\circ)}{\int_{\underline{U}^\circ}^{\bar{u}} \mu(x)dx} \left[u^e - \underline{U}^\circ\right] d\underline{U}^\circ$$

$du^e$ et $d\underline{U}^\circ$ ont donc le même signe. La définition de $\underline{U}$ implique :

$$d\underline{U}^\circ = du^e - dK_2(u^e - z + t) - K_2 du^e$$

En associant ces deux dernières équations, on obtient :

$$\frac{d\underline{U}^\circ}{dK_2} = -\frac{u^e - z + t}{1 + (1 - K_2)\dfrac{\mu\left(\underline{U}^\circ\right)}{\int_{\underline{U}^\circ}^{\bar{u}} \mu(x)dx}\left[u^e - \underline{U}^\circ\right]} < 0 \tag{3.7}$$

en remarquant $u^e - z + t > 0$ par construction et $K_2 \leqslant 1$. ■

## 3.2 Concurrence en prix *à la Bertrand*

Cette partie étudie un autre mécanisme de détermination de la rente, qui s'avère être un cas particulier de la négociation du partage du surplus. Le loyer est désormais choisi par le propriétaire avant l'appariement et annoncé. On considère toujours les états stationnaires sous les hypothèses 1 à 4. En général, la stratégie d'un propriétaire consiste à décider du loyer $R_i$ à chaque date $t$ tant que l'appartement est vacant et, une fois le propriétaire apparié, ce loyer ne peut pas être modifié en fonction des caractéristiques du travailleur. Une stratégie stationnaire (pure) consiste simplement à proposer toujours le même loyer $R_i$ et, puisqu'on raisonne à l'aide des valeurs des états possibles $V_i$ et $O_i$, toute stratégie stationnaire optimale $R_i$ est solution du programme d'optimisation suivant :

$$\max_{R_i} V_i$$

où $V_i$ est définie en adaptant les équations (2.3) et (2.4) :

$$\begin{aligned} rV_i &= -c_i - t + qP(O_i - V_i) \\ rO_i &= -c_i + R_i + \delta(V_i - O_i) \end{aligned}$$

avec $P$ la probabilité anticipée par le propriétaire que le travailleur accepte le loyer. À l'état stationnaire, on obtient ainsi :

$$rV_i = -c_i - t + \frac{qP}{r + \delta + qP}(R_i + t) \tag{3.8}$$

La stratégie d'un travailleur consiste seulement à accepter ou à refuser le loyer proposé.

PROPOSITION 3.5. Sous les hypothèses 1 à 4, lorsque le loyer est déterminé par une concurrence en prix *à la Bertrand* entre les propriétaires, il y a un unique état stationnaire (même en stratégies mixtes) dont la distribution de loyers est celle de l'état stationnaire avec négociation *à la Nash* et $\beta = 0$ (les propriétaires s'approprient tout le surplus).

À cet état stationnaire, les travailleurs acceptent toujours le loyer proposé même s'ils sont indifférents entre louer l'appartement et continuer à chercher. En outre, les locataires n'ont aucune incitation à continuer à chercher et l'hypothèse 4 est inutile (c'est aussi le cas dans la solution *à la Nash* avec $\beta = 0$).

***Preuve***. On montre d'abord que tout loyer d'équilibre $R_i$ vérifie $S = T_i$ pour tout travailleur. D'une part, à un état stationnaire, la stratégie d'un travailleur vérifie : refuser le loyer $i$ si $S > T_i$ et accepter le loyer $i$ si $S < T_i$ (les valeurs peuvent dépendre du travailleur, un équilibre asymétrique n'étant pas exclu *a priori*). L'équation (2.10) implique :

$$T_i > S \Leftrightarrow R_i < u_i - z - \frac{\lambda}{r + \delta + \lambda}(u^e - R^e - z)$$

D'autre part, le propriétaire $i$ préfère un faible loyer associé à $P > 0$ à un fort loyer associé à $P = 0$ dès lors que $R_i \geqslant -t$. Par conséquent, si la position $i$ satisfait :

$$-t \leqslant u_i - z - \frac{\lambda}{r + \delta + \lambda}(u^e - R^e - z) \tag{3.9}$$

alors la seule stratégie optimale du propriétaire est :

$$R_i = u_i - z - \frac{\lambda}{r + \delta + \lambda}(u^e - R^e - z)$$

En effet, tout loyer supérieur implique $P = 0$ et tout loyer inférieur implique $P = 1$ en même temps qu'une incitation pour le propriétaire à augmenter le loyer. Par conséquent, tout appartement qui peut être loué à l'équilibre satisfait $S = T_i$ pour tout travailleur et le loyer est celui donné ci-dessus. Passer à la moyenne sur l'équation ci-dessus implique $u^e - R^e - z = 0$ et donc :

$$R_i = u_i - z$$

C'est la distribution de loyers pour la solution *Nash* avec $\beta = 0$ (voir équation 3.1). Si la position $i$ ne satisfait pas la condition (3.9) : $-t > u_i - z$, alors le propriétaire joue tout loyer supérieur à $-t$, ce qui implique que l'appartement n'est jamais loué. C'est bien la condition d'acceptation de l'appariement du lemme 3.2 avec $\beta = 0$. Enfin, on obtient un état stationnaire en complétant ce profil de stratégies des propriétaires par les stratégies suivantes des travailleurs : accepter (resp. refuser) le loyer proposé par $i$ avec probabilité 1 si, et seulement si, $T_i \geqslant S$ (resp. $T_i < S$). Ce n'est pas l'unique meilleure réponse à la stratégie des propriétaires (si $T_i = S$, $P \neq 1$ est aussi optimale) mais c'est la seule admettant une meilleure réponse de la part des propriétaires. ■

## 3.3 Tension et loyer

Revenant au cas plus général d'une négociation *à la Nash*, on peut maintenant relier le loyer moyen $R^e$ au ratio $\theta = \lambda/q$ qui mesure la tension du marché du logement. Si on suppose vérifiée la condition d'unicité (3.5), il y a un unique $u^e$ pour chaque $\theta$ et l'équation (3.2) donnant le loyer moyen s'écrit :

$$\text{(RB)} \qquad R^e = -t + K_1(\theta)\left[u^e(\theta) - z + t\right]$$

Cette courbe dans le plan $(\theta, R^e)$ est nommée (RB) (pour *Rent Bargaining*). Son interprétation est la suivante. Premièrement, toute tension $\theta$ détermine les appartements dont le $u_i$ est suffisamment élevé pour pouvoir être loué. Ceci détermine $u^e(\theta)$. Deuxièmement, le loyer moyen $R^e$ est fixé par l'équation (3.2). Si la condition d'unicité (3.5) n'est pas satisfaite, (RB) représente une correspondance. On n'étudie pas ce cas.

Comme $u^e$ n'est pas exogène et dépend de l'utilité des appartements loués, la forme de (RB) n'est pas évidente. En effet, $K_1$ est une fonction décroissante de $\theta$ (voir la preuve du lemme 3.6) et $u^e - z + t > 0$ est vraie par construction ($u^e$ est une moyenne sur les appartements loués). Pour de petites valeurs de $\theta$, $u^e$ est la moyenne sur tous les appartements $Eu_i$. Cependant, quand $\theta$ augmente, il se peut que certains appartements n'apportent plus une utilité suffisante pour plaire aux travailleurs et que $u^e$ augmente. Le corollaire 3.4 implique en effet que $u^e$ augmente avec $\theta$. Le lemme suivant établit que l'effet total n'est jamais ambigu : il n'y a pas d'effet *« overshooting »* de $R^e$ sur $u^e$ quand $\theta$ augmente et l'équation (RB) définit une relation décroissante entre $\theta$ et $R^e$.

LEMME 3.6. Si la condition d'unicité (3.5) est vérifiée, $u^e$ augmente avec $\theta$ et (RB) est une courbe strictement décroissante. On a aussi :

$$R^e(0) = Eu_i - z \quad \text{et} \quad R^e(+\infty) = -t$$

où $Eu_i$ est la moyenne (exogène) des flux d'utilité sur l'ensemble des appartements.

***Preuve***. Voir en annexe. ■

L'intuition est que le surplus du propriétaire est d'autant plus faible, relativement à celui du locataire, que la tension du marché est forte. À une tension nulle, les propriétaires trouvent un travailleur immédiatement et imposent le loyer de réservation du locataire, $R^e = Eu_i - z$. À une tension infinie, les locataires paient le loyer de réservation du propriétaire, $R^e = -t$. On rappelle qu'un pouvoir de négociation plus fort des travailleurs décroît le loyer moyen (corollaire 3.4).

# 4 Clôtures du modèle

Il y a plusieurs façons de clôturer le modèle qui intègrent toutes une relation supplémentaire entre le loyer moyen et la tension. À ce stade, on se distingue de la condition de clôture du modèle du marché du travail de PISSARIDES [1990]. Dans son modèle, l'ajustement de l'offre d'emplois est infiniment rapide : elle est déterminée par une condition de libre entrée des vacances, *i.e.* la valeur actualisée d'une vacance est zéro car si elle était strictement positive, des emplois supplémentaires seraient créés, ce qui augmenterait la tension du marché, les salaires et donc la durée de recherche des firmes et éventuellement ramènerait à zéro le rendement d'une vacance supplémentaire. L'offre de travail, quant à elle, est le plus souvent exogène.

Pour le marché du logement considéré ici, la transposition directe de ces conditions ne paraît pas très appropriée (ajustement instantané de l'offre d'appartements, nombre fixe de travailleurs). D'une part, la construction d'un appartement peut correspondre à un délai bien supérieur à la durée de la recherche des agents. Il semble ainsi nécessaire d'examiner l'équilibre d'un marché dans un terme assez court pour que l'offre d'appartements soit fixe. D'autre part, l'offre de travailleurs peut ne pas être infiniment élastique à l'intérieur d'une agglomération. Ce point dépend aussi du terme considéré. À court terme, par exemple à terme d'un mois, une offre fixe paraît pertinente. À moyen terme, par exemple à terme d'un an, on suppose, en revanche, que des agents entrent dans l'agglomération ou la quittent.

À un état stationnaire, on note $o$ le nombre d'appartements occupés, égal par normalisation au nombre de locataires ($o = W - s = A - v$). Les conditions de stationnarité sont :

$$\lambda.s = \delta.o \tag{4.1}$$

$$q.v = \delta.o \tag{4.2}$$

Le taux d'entrée des travailleurs dans un appartement (équation 4.1) et de remplissage des appartements vacants (équation 4.2) sont égaux au taux de destruction. Avec la relation $\theta = \lambda/q$, on déduit de ces deux conditions :

$$\begin{aligned} \lambda &= \delta \frac{A - W\theta}{W - A} \\ q &= \frac{\delta}{\theta} \frac{A - W\theta}{W - A} \\ o &= \frac{A - W\theta}{1 - \theta} \end{aligned} \tag{4.3}$$

On remarque que $\theta < 1 \Leftrightarrow W > A$ et $\lambda$, $q$, $o/A$ et $o/W$ ne dépendent que de $\theta$ et de $A/W$.

## 4.1 Ville fermée : le court terme

Le nombre $W$ de travailleurs et $A$ d'appartements sont fixes. Les caractéristiques des appartements (les flux d'utilité $u_i$) sont aussi fixes. L'état stationnaire est caractérisé par un couple $(\theta, R^e)$ déterminé à partir des conditions de stationnarité (4.3) (qui fixe $\theta$) et de la courbe (RB) (qui permet de déduire $R^e$).

> PROPOSITION 4.1. Soient $A$ et $W$ fixés. Sous les hypothèses 1 à 4 et sous la condition d'unicité (3.5), il existe un unique état stationnaire $(\theta^*, R^e)$. En outre, $\theta^*$ est une fonction croissante de A et décroissante de W. Si $W > A$ (resp. $W \leqslant A$), $\theta^*$ est aussi une fonction croissante (resp. décroissante) de $\delta$ et on a $\theta^* < 1$ (resp. $\theta^* \geqslant 1$).

***Preuve***. Il existe un unique $\theta^*$ satisfaisant les conditions (4.3). En effet, dans le cas $W \geqslant A$, on considère :

$$\lambda(\theta) = \delta \frac{A - W\theta}{W - A}$$

Pour $\theta > 0$, le membre de gauche (resp. droite) est croissant (resp. décroissant) par rapport à $\theta$ et varie de 0 à $+\infty$ (resp. de $A/W$ à $-\infty$). Cette équation a donc une unique solution $\theta^*$ (figure 1). Comme le membre de droite intersecte l'axe des abscisses en $\theta = A/W$, on a $\theta^* < 1$ et $\theta^*$ croît avec $\delta$. Dans le cas $W \leqslant A$, on procède de façon analogue avec la condition :

$$q(\theta) = \frac{\delta}{\theta}\frac{A - W\theta}{W - A}$$

Dans les deux cas, on vérifie aisément les variations annoncées de $\theta^*$ avec $A$ et $W$. ■

FIGURE 1
***Caractérisation de $\theta^*$ (égalité des flux de création et de destruction)***

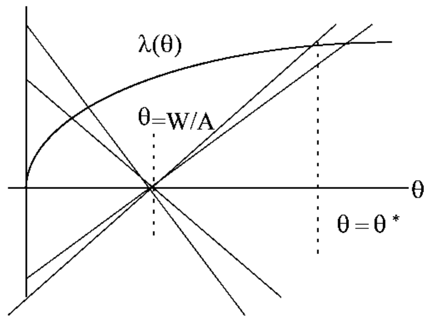



FIGURE 2
***État stationnaire de court terme*** $(\theta^*, R^e)$

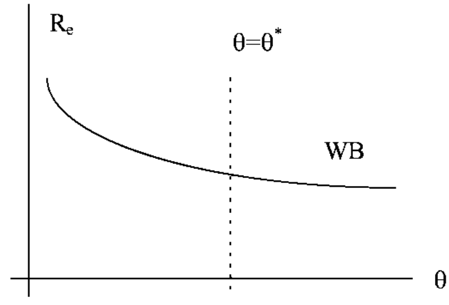
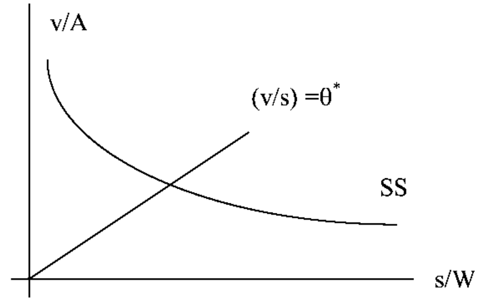



FIGURE 3
***L'état stationnaire***



La courbe (RB) et la valeur de $\theta^*$ de la proposition 4.1 déterminent $R^e$ (figure 2). Si la condition d'unicité (3.5) n'est pas satisfaite, il y a encore une unique tension $\theta^*$ mais il peut y avoir plusieurs états stationnaires $(\theta^*, R^e)$ qui correspondent aux solutions *à la Nash* associées à la valeur $\theta^*$ et définies dans la proposition 3.3.

Deux équations dans le plan $(v,s)$ complètent le modèle : la relation affine $v = \theta^*.s$ entre $s$ et $v$ et une courbe (SS) (pour *Steady State*) qui est la condition de stationnarité (4.1) [6] :

$$\lambda(v/s).s = \delta.(W - s)$$

(figure 3). Les valeurs stationnaires de $v$ et $s$ s'obtiennent à l'intersection de ces deux courbes. La courbe (SS) est une courbe *de Beveridge*. C'est son existence supposée qui a justifié, en introduction, l'intérêt porté aux flux sur le marché du logement, et qui suggère l'intérêt de réaliser des travaux empiriques.

## 4.2 **Ville ouverte : le moyen terme**

Une alternative naturelle à l'analyse de court terme est d'ajouter au modèle une condition de libre entrée. Chez PISSARIDES [1990], une telle condition porte sur les firmes : celles-ci ouvrent des vacances jusqu'à ce que le rendement de la vacance supplémentaire soit zéro. Cette hypothèse est difficilement soutenable dans le contexte du marché du logement en raison des coûts significatifs associés à la création d'un appartement vacant. On préfère donc introduire une condition de libre entrée pour les travailleurs : la valeur $S$ de la recherche est égale à une option de sortie exogène (renoncer à chercher et profiter d'un flux de loisir exogène $l$) notée $\overline{S}$ et déterminée par :

$$r\overline{S} = z + l + \delta(\overline{U} - \overline{S}) \tag{4.4}$$

Ainsi $A$ et les flux d'utilité $u_i$ sont toujours exogènes mais $W$ est désormais endogène. Il résulte de la condition $\overline{S} = S$ où $S$ est la valeur de la recherche à l'état stationnaire.

L'état stationnaire de moyen terme correspond à un couple $(\theta, R^e)$. La valeur $\theta$ est choisie de sorte que $\overline{S} = S$. Le loyer moyen $R^e$ se déduit ensuite de la courbe (RB) (comme dans le court terme).

Sous la condition d'unicité (3.5), l'équation (4.4), combinée aux équations (2.1) et (2.9), implique :

$$\lambda(T^e - S) = l = \lambda\frac{u^e - z - R^e}{r + \lambda + \delta} \tag{4.5}$$

La condition de libre entrée $\overline{S} = S$ s'écrit donc :

$$R^e = u^e(\theta) - z - l\frac{r + \delta + \lambda(\theta)}{\lambda(\theta)} \tag{FEW}$$

6. ou, de façon équivalente, la condition (4.2) : $q(v/s).v = \delta.(A - v)$

où $u^e(\theta)$ est le flux d'utilité anticipé associé à la tension $\theta$ comme dans la définition de (RB) (moyenne des $u_i$ des appartements loués quand la tension est $\theta$). Cette équation définit une courbe dans le plan $(\theta, R^e)$ notée (FEW) pour *Free-Entry of Workers*. Les états stationnaires $(\theta, R^e)$ sont par construction les points d'intersection de (RB) avec (FEW).

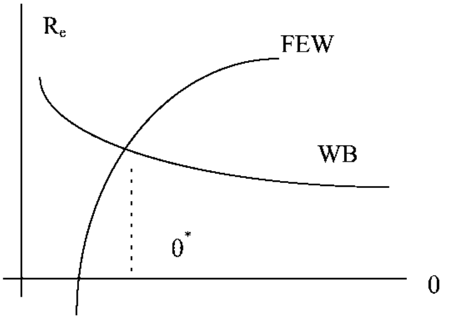
PROPOSITION 4.2. Sous les hypothèses 1 à 4 et sous la condition d'unicité (3.5), la courbe (FEW) est strictement croissante de $-\infty$ à $\overline{u} - z - l$. Il existe un état stationnaire $(\theta^*, R^e)$ si, et seulement si, $l + z - t < \overline{u}$. Si l'état stationnaire existe, il est unique. À l'état stationnaire, tous les appartements peuvent être loués si, et seulement si, $\underline{u} > l + z - t$.

***Preuve***. Voir en annexe. ■

L'état stationnaire est représenté dans le plan $(\theta, R^e)$ dans la figure (4). Il détermine le profil des loyers dans la ville (c'est l'équation 3.1) et le ratio $\theta$ des travailleurs en recherche par rapport à l'offre d'appartements. L'intuition du sens de variation de (FEW) dans le plan $(\theta, R^e)$ est simplement que le coût de la recherche (par rapport au loisir $l$) est compensé par le surplus issu de la recherche : une hausse du loyer est compensée par un raccourcissement de la durée de la recherche, *i.e.* une hausse de $\lambda$ et donc une hausse de la tension $\theta$. L'équilibre dans le plan $(s, v)$ demeure le même (figure 3).

L'extension du cas de court terme au cas de moyen terme suggère la possibilité d'un troisième cas, de long terme, dans lequel l'offre d'appartements est endogène, éventuellement infiniment élastique. Ce cas est moins standard que les deux précédents, on ne souhaite donc pas trop s'y attarder et on le fait figurer en annexe. On montre notamment que, si le coût de construction d'un appartement est convexe en l'utilité qu'il procure, la plus grande partie de la statique comparative du moyen terme (décrite dans la section suivante) est encore valide.

FIGURE 4
***L'équilibre de moyen terme***



# 5 Statique comparative et conclusion

## 5.1 Résumé

On peut maintenant étudier l'effet des différents paramètres sur les courbes (RB) et (FEW) et sur les grandeurs d'équilibre $R^e$ et $\theta$. Certains des résultats dépendent crucialement de la tension du marché, c'est-à-dire de la position de $\theta$ par rapport à 1 (soit encore, en d'autres termes, de la condition $\lambda > q$). Ainsi, dans le tableau 1 qui présente les résultats de statique comparative, l'indice (1) signifie $\lambda > q$ et l'indice (2) $\lambda < q$. Étant donné la tension $\theta = \lambda/q$, la condition (1) équivaut à $\theta > 1$ (marché « *facile* » pour les travailleurs) et la condition (2) à $\theta < 1$ (marché « difficile » pour les travailleurs). Les symboles + et – dans ces cases correspondent à un sens de variations sans ambiguité, le symbole ? signifie une ambiguité qui ne peut être levée. Enfin, la variation de $u^e$ due à une variation du nombre d'appartements susceptibles d'être loués est prise en compte.

Les intuitions des résultats sont les suivantes. Augmenter le pouvoir de négociation des travailleurs $\beta$ abaisse (RB). Dans le court terme, le rapport $\theta^* = v/s$ ne varie pas mais, quand les travailleurs peuvent entrer dans la ville (moyen-terme), un loyer plus faible les attire et il y a donc plus de travailleurs pour un nombre donné d'appartements vacants. Le loyer moyen $R^e$ baisse également, quoique moins que dans le court-terme.

TABLEAU 1
***Statique comparative***

| augmentation $\rightarrow$ | $\beta$ | $r$ | $\delta$ | $z$ | $t$ | $l$ | $x(1,1)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | pouvoir négoc. | taux d'actu. | taux de rotation | utilité de rech. | taxe vac. | loisir ext. | efficac. appar. |
| (RB) | – | + si (1)<br>– si (2) | + si (1)<br>– si (2) | – | – | 0 | – |
| (FEW) | 0 | – | – | + | 0 | – | + |
| Court terme | | | | | | | |
| $R^e$ | – | + si (1)<br>– si (2) | ++ si (1)<br>– – si (2) | – | – | 0 | – si (1)<br>+ si (2) |
| $\theta^*$ | 0 | 0 | – si (1)<br>+ si (2) | 0 | 0 | 0 | – si (1)<br>+ si (2) |
| Moyen terme | | | | | | | |
| $R^e$ | – | + si (1)<br>– si (2) | ? si (1)<br>– si (2) | – | – | – | ? |
| $\theta^*$ | – | + si (1)<br>? si (2) | + si (1)<br>? si (2) | ? | – | + | – |

Une augmentation de l'utilité hors de la ville *l* abaisse la courbe (FEW) : un loyer plus faible est nécessaire pour préserver le nombre de travailleurs dans la ville. Ce paramètre n'a pas d'effet sur la courbe de négociation, et l'effet d'une hausse de *l* est de décroître le loyer et d'accroître la tension $\theta$ (en raison de la baisse du nombre de travailleurs en prospection).

Une augmentation du taux de rotation $\delta$ a un effet dans le court terme : $\theta$ décroît dans le cas (1) et croît dans le cas contraire. $\delta$ influence aussi le processus de négociation et la courbe (RB) est déplacée. Quand la tension est forte, le loyer a tendance à augmenter avec la rotation. En effet, dans ce marché, les travailleurs sont en position de force, et augmenter les flux augmente le nombre de travailleurs en recherche d'un logement relativement plus que le nombre de logements vacants, ce qui bénéficie aux propriétaires, qui à l'équilibre négocient un loyer supérieur. C'est le contraire qui se produit dans un marché peu tendu. Le résultat est que, dans le moyen terme, il y a une association très positive entre la rotation $\delta$ et le loyer moyen dans le cas (standard) $\theta = v/s > 1$. Dans le moyen terme, une rotation plus importante diminue l'utilité espérée pour les travailleurs de rester en ville et (FEW) s'abaisse.

Une variation de *r* produit les mêmes effets qu'une variation de $\delta$ puisque $\delta$ peut être considéré comme un autre taux d'actualisation.

Une augmentation de l'efficacité de l'appariement [7] augmente proportionnellement à la fois $\lambda$ et *q*, à $\theta$ donné. Dans le court terme (figure 1), cela conduit à augmenter $\theta^*$, dans le cas (1), et à le diminuer, dans le cas (2). L'interprétation est diamétralement opposée à celle de l'effet de $\delta$. Un appariement plus efficace diminue le nombre d'agents en recherche, ce qui bénéficie plus aux travailleurs quand le marché leur est « *difficile* », $\theta < 1$, et aux propriétaires quand $\theta > 1$. Cela se traduit par une baisse du loyer dans le cas (1). Concernant (FEW), un loyer plus élevé est requis pour maintenir le nombre de travailleurs en prospection car ceux-ci trouvent un appartement plus facilement. Ainsi (FEW) s'élève, ce qui entraîne une ambiguité sur la variation de $R^e$, mais un effet sans ambiguité sur $\theta$ qui baisse, en raison de l'afflux de travailleurs dans la ville.

## 5.2 Liens avec la littérature

Dans cette partie, on décrit rapidement les différences entre nos résultats et la littérature. Dans un monde *« walrasien »*, le loyer est déterminé de la façon suivante : les agents font des offres et le propriétaire choisit l'agent proposant le loyer le plus élevé. Quand tous les agents sont identiques, cela signifie qu'il ne peut pas exister de différences d'utilité persistantes entre locataires puisque les loyers égalisent ces utilités. En d'autres termes, dans un monde sans frictions, les loyers jouent un rôle important en rendant identiques les utilités *ex post*. Dans notre modèle, au contraire, il y a des frictions de recherche et certains agents sont donc plus chanceux que d'autres : ils peuvent trouver un appartement plus attractif que la moyenne. Le loyer pourrait-il être plus élevé de sorte que ces agents soient indifférents entre demeurer locataires de leur

7. On appelle efficacité de l'appariement le paramètre d'échelle de la fonction d'appariement $x(1, 1)$.

appartement ou en *occuper* un autre ? La réponse à cette question est négative : ainsi qu'on l'a vu, la variation du loyer est seulement une fraction $0 < \phi < 1$ de la variation de l'utilité $u_i$. Ainsi, le flux d'utilité, et donc aussi l'utilité sur tout le cycle de vie, diffèrent d'un agent à l'autre. Les frictions de recherche créent donc des variations d'utilité *ex post*, quand le coût de la recherche induits par les frictions est supérieur à la différence d'utilité espérée par un agent. Ce résultat est standard pour le marché du travail, nous l'avons transposé dans le cadre du marché du logement.

Par rapport à WHEATON [1990], mises à part les différences relevées dans l'introduction, on constate que le taux de rotation $\delta$ est corrélé positivement ou négativement au loyer selon la tension du marché (position de $\theta$ par rapport à 1). Dans l'article de WHEATON, ce n'est pas le cas, le loyer est toujours corrélé positivement au taux de rotation. La raison de cette différence est simplement que WHEATON restreint son étude aux transactions satisfaisant une double coïncidence des voeux, ce qui implique une tension inférieure à 1, *i.e.* il y a moins de vacances que d'agents en recherche.

## 5.3 Une application à la taxation des appartements vacants

L'existence de frictions de recherche a de nombreuses implications en termes de politique économique. Par exemple, une subvention aux locataires (allocation de logement) n'augmenterait pas en proportion le loyer car ce transfert, augmentant le surplus total du couple locataire/propriétaire, serait partagé en proportion $\beta$ et $1 - \beta$. On ne fait pas ici les calculs correspondants et on étudie plutôt une autre mesure récemment débattue, la taxation des appartements vacants représentée par le paramètre $t$. On souligne que ce paramètre reste une représentation schématique d'une telle mesure car la taxation envisagée était supposée intervenir après quelques mois de vacance seulement et n'était pas forfaitaire mais fonction de la valeur des appartements.

Toutefois, en gardant ces restrictions à l'esprit, on peut commenter les effets de $t$. Dans le court terme, cette taxe joue en faveur des locataires car l'augmenter revient à diminuer le point de menace des propriétaires. On s'attend donc à une chute du loyer, c'est bien ce que prédit le modèle. Dans le moyen terme, la baisse du loyer attire des travailleurs supplémentaires. La courbe (FEW) étant indépendante de $t$, on constate, en effet, que la hausse de $t$ diminue la tension $\theta$ et que le loyer moyen $R^e$ baisse aussi, mais moins nettement que dans le court terme. Dans le long terme (voir en annexe), l'effet est le même qu'à moyen terme puisque la qualité des appartements n'est pas influencée par $t$ (équation A4 en annexe) [8].

Ainsi, dans le moyen ou long terme, la taxation des appartements vacants a un effet négatif à la fois sur les propriétaires et sur les travailleurs à la recherche d'une location (puisque la tension diminue). En revanche, elle favorise les locataires, qui sont en mesure de négocier un loyer plus avantageux. Il s'agit là d'un résultat relativement général en présence de frictions impor-

---

8. Les effets des taxes sur les transactions sont discutés par LUNDBORG et SKEDINGER [1999] dans un modèle inspiré de celui de WHEATON [1990]. Leur effet (négatif) sur le bien-être est dû en partie à un effort de recherche endogène qui est ici exclu.

tantes : *les mesures qui tendent à protéger les agents d'un certain type (employés, locataires) le font au détriment de ceux qui aspirent à accéder à ce statut (chômeurs, personnes ayant des difficultés à se loger)*.

## 5.4 **Conclusion**

Cet article propose une analyse du marché du logement locatif incluant des frictions de recherche. Ces frictions sont spécifiées de façon à ce que les appariements entre propriétaires et locataires dépendent des variables du marché. Le taux d'arrivée des appariements pour les propriétaires augmente avec le nombre de travailleurs à la recherche d'un logement et, réciproquement, le taux d'arrivée des appariements pour les travailleurs augmentent avec le nombre de logements vacants. Le recours à une fonction d'appariement à rendements d'échelle constants permet d'obtenir de telles propriétés. Il permet aussi de transposer certaines intuitions issues de l'étude du marché du travail. Dans le modèle retenu, l'hétérogénéité est présente *ex ante* : les appartements ne sont pas identiques du point de vue des locataires. On résoud le modèle dans trois situations correspondant à une offre fixe de travailleurs et d'appartements, à une offre élastique de travailleurs et enfin à une offre élastique de travailleurs et d'appartements (voir annexe). La statique comparative amène généralement à des résultats sans ambiguité et plus généraux que la littérature existante. Des travaux ultérieurs devraient cependant tenter d'incorporer des hypothèses plus réalistes, notamment concernant l'homogénéité des travailleurs. Cet article semble toutefois une première étape utile.

## • Références bibliographiques


ANAS A. (1997). – « Rent Control with Matching Economies: A Model of European Housing Market Regulation », *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 15(1), pp. 111-37.

ARNOTT R.J. (1988). – « Housing Vacancies, Thin Markets, and Idiosyncratic Tastes », Queen's Institute for Economic Research *Discussion Paper*: 722.

BURDETT K., MORTENSEN D.T. (1998). – « Wage Differentials, Employer Size and Unemployment » *International Economic Review.*

BLANCHARD O.J., DIAMOND P. (1989b). – The Agregate Matching Function, in Diamond ed, *Growth, Productivity and Unemployment*, MIT Press.

BURDA M., WYPLOSZ C. (1994). – « Gross Workers and Job Flows in Europe », *European Economic Review*, 38(6), pp. 1287-1315.

FUJITA M. (1989). – *Urban Economic Theory*, Cambridge: Cambridge University Press.

GRIMAUD A. (1990). – « Boîte d'Edgeworth et théorie de la localisation. », *Revue Économique* (3), pp. 531-545.

LUNDBORG P., SKEDINGER P. (1999). – « Transaction Taxes in a Search Model of the Housing Market ». *Journal of Urban Economics* 45, pp. 385-399.

VAN OMMEREN J., RIETVELD P., NIJKAMP P. (1997). – « Commuting: In Search of Jobs and Residences », *Journal of Urban Economics*, 42(3), pp. 402-21.

OSBORNE M., RUBINSTEIN A. (1990). – *Bargaining and Markets*, San Diego Academic Press.

PISSARIDES C.A. (1986). – « Unemployment and Vacancies in Britain », *Economic Policy.*

PISSARIDES C.A. (1990). – *Equilibrium Unemployment Theory*, Oxford, Basil Blackwell.

READ C. (1988). – « Advertising and Natural Vacancies in Rental Housing Markets », *American Real Estate and Urban Economics Association Journal*, 16(4), pp. 354-63.

READ C. (1991). – « A Price Dispersion Equilibrium in a Spatially Differentiated Housing Market with Search Costs », *American Real Estate and Urban Economics Association Journal*, 19(4), pp. 532-47.

READ C. (1993). – « Tenants' Search and Vacancies in Rental Housing Markets », *Regional Science and Urban Economics*, 23(2), pp. 171-83.

READ C. (1997). – « Vacancies and Rent Dispersion in a Stochastic Search Model with Generalized Tenant Demand », *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 15(3), pp. 223-37.

ROSENTHAL L. (1997). – « Chain Formation in the Owner Occupied Housing Market », *Economic Journal*, 107(441), pp. 475-88.

SONMEZ T. (1996). – « Implementation in Generalized Matching Problems », *Journal of Mathematical Economics*, 26(4), pp. 429-39.

THIES C. F. (1993). – « Rent Control with Rationing by Search Costs: A Note », *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 7(2), pp. 159-65.

TURNBULL G.K., SIRMANS C.F. (1993). – « Information, Search, and House Prices », *Regional Science and Urban Economics*, 23(4), pp. 545-57.

WHEATON W. (1990). – « Vacancy, Search, and Prices in a Housing Market Matching Model », *Journal of Political Economy*, 98(6), pp. 1270-92.

YINGER J. (1981). – « A Search Model of Real Estate Broker Behavior », *American Economic Review*, 71(4), pp. 591-605.

ZENOU Y. (1999). – « Unemployment in Cities », in *Economics of Cities*, J-M. Huriot and J-F. Thisse eds., Cambridge University Press, à paraître.

# ANNEXE

## A.1 Preuve du lemme 3.1

On considère seulement les états stationnaires. Soit $R^e$ le loyer moyen anticipé par un travailleur. On détermine d'abord le loyer optimal $R_i$ auquel l'appariement est accepté par les deux agents, en supposant qu'un tel loyer existe. Quand on calcule le loyer $R_i$ négocié *à la Nash*, $S$ et $V_i$ sont fixés : le travailleur peut obtenir à l'occasion d'un autre appariement une location à un prix $R_i^*$ anticipé, c'est le même loyer que le propriétaire $i$ espère obtenir à l'occasion d'un autre appariement (les anticipations sont stationnaires). Par conséquent, la condition de premier ordre de la négociation du loyer s'écrit [9] :

$$\beta(O_i - V_i) = (1-\beta)\,(T_i - S)$$

Cette équation devient, en utilisant les équations (2.1) à (2.9) :

$$\beta\frac{R_i + t}{r+q+\delta} = (1-\beta)\frac{1}{r+\delta}\left[u_i - R_i - z - \frac{\lambda}{r+\delta+\lambda}(u^e - R^e - z)\right]$$

Quelques calculs supplémentaires donnent :

$$R_i = \phi\left[u_i - z - \frac{\lambda}{r+\delta+\lambda}(u^e - R^e - z)\right] - \frac{\beta}{1+(1-\beta)\dfrac{q}{r+\delta}}t$$

En prenant la moyenne de l'expression ci-dessus sur l'ensemble des appartements qui peuvent être loués, on obtient :

$$R^e - \phi\left(u^e - z\right) = -\frac{\lambda\phi}{r+\delta+\lambda}(u^e - R^e - z) - \frac{\beta}{1+(1-\beta)\dfrac{q}{r+\delta}}t$$

C'est l'équation (3.2). Substituer le second membre par sa valeur dans l'expression précédente donne exactement l'équation (3.1).

On donne maintenant une condition nécessaire et suffisante pour qu'un agent accepte le loyer $R_i$. Le point de menace du propriétaire est $V_i$. Donc, celui-ci accepte l'appariement si, et seulement si :

$$O_i > V_i$$

9. On vérifie aisément que ce programme de maximisation est strictement concave et défini sur un intervalle fermé. L'unique solution est intérieure puisque la fonction objectif est positive et prend la valeur zéro aux deux bornes de l'intervalle.

$O_i$ est calculé avec le loyer $R_i$ déterminé ci-dessus alors que $V_i$ est calculé avec le loyer $R_i^*$ que les agents pensent obtenir à l'occasion d'autres appariements. Le point crucial est que les agents anticipent correctement la distribution de loyers : les deux loyers $R_i$ et $R_i^*$ sont égaux à l'état stationnaire. Par conséquent, d'après les équations (2.3) et (2.4), la valeur $O_i$ d'accepter l'appariement au prix $R_i$ est :

$$(r+\delta)O_i = -c_i + R_i + \delta V_i$$

et la valeur $V_i$ de refuser l'appariement est :

$$rV_i = -c_i - t + q(O_i - V_i)$$

où $O_i$ est la valeur anticipée d'une location de l'appartement au loyer $R_i$. Quelques calculs montrent que $O_i > V_i$ équivaut à :

$$R_i > -t$$

qui est bien la condition annoncée.

Le point de menace du travailleur est $S$. D'après l'équation (2.2), la valeur $T_i$ d'accepter l'appariement au prix $R_i$ est :

$$(r+\delta)T_i = u_i - R_i + \delta\overline{U}$$

et, d'après les équations (2.1) et (2.9), la valeur $S$ de refuser l'appariement est :

$$(r+\delta)S = z + \delta\overline{U} + \frac{\lambda}{r+\delta+\lambda}(u^e - R^e - z)$$

Quelques calculs montrent que $T_i > S$ équivaut à :

$$u_i - R_i - z > \frac{\lambda}{r+\delta+\lambda}(u^e - R^e - z)$$

On remarque que $\phi$ appartient à $[0{,}1]$, que l'équation (2.9) implique $u^e - R^e - z > 0$ et que $T^e > S$ puisque $T^e$ est une moyenne sur les appartements loués. L'équation (3.1) entraîne alors la condition annoncée. ■

## A.2 **Preuve de la proposition 3.3**

Soit $\mu$ la densité de la distribution de flux d'utilité $u_i$ sur $\left[\underline{u},\overline{u}\right]$ et $\tau$ la fonction définie sur $\left[\underline{u},\overline{u}\right]$ :

$$\tau(x) = \frac{\displaystyle\int_{\underline{U}(x)}^{\overline{u}} x\mu(x)dx}{\displaystyle\int_{\underline{U}(x)}^{\overline{u}} \mu(x)dx} \geqslant \underline{U}(x) \tag{A.1}$$

$\tau$ est une fonction continue et croissante de $\left[\underline{u},\overline{u}\right]$ sur $[Eu_i, \tau(\overline{u})]$ avec $\tau(\overline{u}) < \overline{u}$. En effet, on a :

$$\text{(A.2)} \qquad \frac{d\tau}{dx} = \frac{\mu\left[\underline{U}(x)\right]}{\displaystyle\int_{\underline{U}(x)}^{\overline{u}} \mu(x)dx} \frac{d\underline{U}}{dx}\left[\tau(x) - \underline{U}(x)\right] \geqslant 0$$

En outre, on a aussi :

$$\frac{d\tau}{dx} \leqslant \frac{\mu\left[\underline{U}(x)\right]}{\displaystyle\int_{\underline{U}(x)}^{\overline{u}} \mu(x)dx}\left[\overline{u} - \underline{U}(x)\right] \leqslant 1$$

Par conséquent $\tau$ admet un point fixe unique.

$\tau$ est l'application d'équilibre temporaire de l'économie : si tous les agents anticipent un flux moyen d'utilité $u^e$ sur l'ensemble des appartements loués, alors le flux moyen d'utilité sur le même ensemble qui se réalise effectivement est $\tau(u^e)$. Par conséquent, une condition nécessaire pour que $u^e$ corresponde à un état stationnaire est que $u^e$ soit le point fixe de $\tau$. Les équations (3.1), (3.2) et le lemme 3.2 montrent que $u^e$ caractérise un état stationnaire. Il y a donc au plus un état stationnaire avec une négociation *Nash*. Réciproquement, on vérifie immédiatement que ce point fixe $u^e$ définit bien un état stationnaire.

## A.3 Preuve du lemme 3.6

Toutes les dérivées sont par rapport à $\theta$. On remarque d'abord que $u^e - z + t > 0$. Quelques calculs montrent que :

$$\frac{dK_1}{K_1} = \frac{dq}{r+\delta+q} - \frac{\beta d\lambda + (1-\beta)dq}{r+\delta+\beta\lambda+(1-\beta)q}$$

$$\frac{dK_2}{K_2} = \frac{(1-\beta)dq}{r+\delta+(1-\beta)q} - \frac{\beta d\lambda + (1-\beta)dq}{r+\delta+\beta\lambda+(1-\beta)q}$$

Par conséquent $K_1'$ et $K_2'$ ont le signe de $(r+\delta+\lambda).q' - (r+\delta+q).\lambda'$ et $-\lambda'$ respectivement qui sont deux expressions négatives. On obtient aussi :

$$\frac{K_1'}{K_1} - \frac{K_2'}{K_2} < 0$$

On remarque aussi que $R^{e\prime} < 0$ tant que $u^e = Eu_i$. Quand ce n'est pas le cas, différentier l'équation (RB) donne :

$$dR^e = (u^e - z + t)dK_1 + K_1 du^e$$

Or, on a vu dans la preuve du corollaire 3.4 :

$$du^e = -\frac{\left[u^e - z + t\right]\mu\left(\underline{U}^\circ\right)\left[u^e - \underline{U}^\circ\right]}{\int_{\underline{U}^\circ}^{\overline{u}} \mu(x)dx + (1 - K_2)\,\mu\left(\underline{U}^\circ\right)\left[u^e - \underline{U}^\circ\right]} dK_2$$

La combinaison de ces deux équations implique :

$$dR^e = (u^e - z + t)K_1$$

$$\left[\frac{dK_1}{K_1} - \frac{\mu\left(\underline{U}^\circ\right)\left[u^e - \underline{U}^\circ\right]K_2}{\int_{\underline{U}^\circ}^{\overline{u}} \mu(x)dx + (1 - K_2)\,\mu\left(\underline{U}^\circ\right)\left[u^e - \underline{U}^\circ\right]}\frac{dK_2}{K_2}\right]$$

On remarque que $K_2 < 1$ et la condition (3.5) implique :

$$\mu(\underline{U}^\circ)\left[u^e - \underline{U}^\circ\right]K_2 < \int_{\underline{U}^\circ}^{\overline{u}} \mu(x)dx + (1 - K_2)\,\mu(\underline{U}^\circ)\left[u^e - \underline{U}^\circ\right]$$

On obtient donc :

$$\frac{K_1'}{K_1} - \frac{\mu(\underline{U}^\circ)\left[u^e - \underline{U}^\circ\right]K_2}{\int_{\underline{U}^\circ}^{\overline{u}} \mu(x)dx + (1 - K_2)\mu(\underline{U}^\circ)\left[u^e - \underline{U}^\circ\right]}\frac{K_2'}{K_2} < \frac{K_1'}{K_1} - \frac{K_2'}{K_2} < 0$$

$R^{e\prime}$ est négatif dans ce cas aussi.

Finalement $K_2(0) = 1$ implique que la condition (3.6) d'acceptation de tous les appariements est satisfaite au voisinage de $\theta = 0$. Puisque $K_1(0) = 1$ et $K_1(+\infty) = 0$, on obtient $R^e(0) = Eu_i - z$ et $R^e(+\infty) = -t$. Enfin $K_2'$ étant négative, le corollaire 3.4 montre que $u^e$ est une fonction croissante de $\theta$.

## A.4 Preuve de la proposition 4.2

Soit $\theta_{\max}$ la valeur saturant la condition (3.6) de la proposition 3.3. $\theta_{\max}$ est défini implicitement par :

$$\underline{u} = Eu_i - K_2(\theta_{\max})\,(Eu_i - z + t)$$

Puisque $\lambda$ est une fonction croissante de $\theta$, l'équation (FEW) est de la forme :

$$R^e(\theta) - u^e(\theta) = f(\theta) \overset{\text{déf}}{=} -z - l\frac{r + \delta + \lambda(\theta)}{\lambda(\theta)}$$

où $f$ est une fonction croissante de $\theta$. Puisque $u^e$ croît avec $\theta$, l'équation (FEW) définit dans le plan $(R^e,\theta)$ une courbe ascendante. En outre, tant que

$\theta < \theta_{\max}$, $u^e = Eu_i$ ($K_2$ est une fonction décroissante de $\theta$, voir preuve du lemme 3.6). Quand $\theta > \theta_{\max}$, $\underline{U}^\circ > \underline{u}$ et $u^e > Eu_i$. Finalement, quand $\theta$ tend vers $+\infty$, $K_2$ tend vers 0 et $u^e$ tend vers son maximum $\overline{u}$ (en considérant la condition de point fixe (A.1) sur $u^e$ et la définition de $\underline{U}(u^e)$). Par conséquent, étant donné $\lambda(0) = 0$, (FEW) croît de $-\infty$ à $\overline{u} - z - l$.

Puisque (RB) est décroissante, (RB) et (FEW) s'intersectent au plus une fois. En outre, (RB) est au dessus de (FEW) pour tout $\theta > 0$ si, et seulement si, $\lim_{+\infty} RB > \lim_{+\infty} FEW$. (RB) est au-dessus de (FEW) en $\theta$ si, et seulement si :

$$\left[u^e(\theta) - z + t\right][1 - K_2(\theta)] < l \tag{A.3}$$

Comme les termes $u^e - z + t$ et $1 - K_2(\theta)$ sont positifs et croissants par rapport à $\theta$, le membre de gauche de l'inégalité (A.3) est croissant par rapport à $\theta$. On peut maintenant conclure. Si $l + z - t < \underline{u}$, la condition (A.3) est satisfaite en $\theta_{\max}$ et il existe une solution, elle satisfait $u^e = Eu_i$. Si $\underline{u} < l + z - t < \overline{u}$, la condition (A.3) n'est pas satisfaite en $\theta_{\max}$ et il n'existe pas de solution satisfaisant $u^e = Eu_i$. Mais, quand $\theta$ tend vers $+\infty$, $K_2$ tend vers 0 et $u^e$ vers son maximum $\overline{u}$. La condition (A.3) en $\theta = +\infty$ est donc $\overline{u} > l + z - t$ et il existe une solution satisfaisant $u^e > Eu_i$. Si $\overline{u} < l + z - t$, il n'existe aucune solution puisque (RB) est au-dessus de (FEW) en $\theta = +\infty$.

## A.5 Le cas de long terme

On considère toujours une ville de taille donnée $[0, A]$ identifiée à l'ensemble des appartements et à celui des propriétaires [10] mais on permet aux propriétaires de construire leur appartement avant qu'aucun travailleur ne soit entré sur le marché. Précisément, on suppose que les propriétaires sont capables de choisir parfaitement le flux d'utilité procuré au locataire : un appartement donnant une utilité $u$ est construit à un coût $\Gamma(u)$avec $\Gamma(0) = \Gamma'(0) = 0$, $\Gamma' > 0$, $\Gamma'' > 0$. Par souci de simplicité, on suppose que $\Gamma(.)$ est indépendant de $i$. La détermination complète de $u_i$ par le propriétaire $i$ est une hypothèse forte parce que les grandeurs dont dépend le flux d'utilité d'un appartement sont, en général, fonction de la position de l'appartement ou endogènes. En ce sens, l'analyse reste en équilibre partiel.

La chronologie est modifiée comme suit : en première période, chaque propriétaire construit l'appartement le plus profitable puis, en seconde période, l'équilibre de moyen terme correspondant à la ville ainsi construite apparaît. Le choix par les propriétaires d'un profil d'utilité à la première période détermine ainsi deux courbes (RB) et (FEW) particulières.

La décision de construction par un propriétaire est la conclusion de son anticipation de l'équilibre de moyen terme $(\theta, R^e)$ qui apparaît en seconde période. Le programme d'optimisation du propriétaire est : $\max\limits_u V(u) - \Gamma(u)$. Le lemme suivant donne la solution de ce programme. Celle-ci dépend de la taille infinitésimale du propriétaire (le choix de celui-ci n'influence pas

---

10. Avec une libre entrée des travailleurs, fixer $A$ est sans perte de généralité car la relation entre $\theta$, $A$ et $W$ est en fait une relation entre $\theta$ et $A/W$.

$\theta$, $u^e$ et $R^e$ et de l'anticipation d'un profil de loyers $R(u)$ comme dans la solution *à la Nash* (voir l'équation 3.2). On remarque, enfin, que la décision du propriétaire ne dépend en fait que de $\theta$ et pas de $R^e$.

LEMME A.1. Si un propriétaire anticipe un profil de loyers de la forme :

$$R(u) = \phi(\theta)\, u + \text{ constante}$$

($\phi$ définie dans le lemme 3.1), alors il construit un appartement qui procurera à son éventuel locataire un flux d'utilité :

$$\hat{u}(\theta) = \Gamma'^{-1}\left(\frac{1-\beta}{r}\frac{q(\theta)}{r+\delta+(1-\beta)q(\theta)}\right) \tag{A.4}$$

et $\hat{u}$ est une fonction décroissante de $\theta$.

***Preuve***. Par définition de la valeur $V$ d'une position $i$, on obtient en combinant, par exemple, les équations (2.3) et (2.11) :

$$rV = -c + \frac{R(u).q - (r+\delta).t}{r+\delta+q} \tag{A.5}$$

Puisque $R$ est une fonction affine de $u$ et que $\Gamma$ est convexe, le programme d'optimisation est concave et sa solution unique satisfait la condition de premier ordre suivante :

$$\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{q}{r(r+q+\delta)}\frac{\partial R}{\partial u} = \frac{q(\theta).\phi(\theta)}{r(r+q(\theta)+\delta)} = \Gamma'(u)$$

Étant donné la définition de $\phi$, cette condition s'écrit :

$$\Gamma'(u) = \frac{1-\beta}{r}\frac{q(\theta)}{r+\delta+(1-\beta)q(\theta)}$$

On remarque que tous les appartements construits sont identiques. On pose :

$$\hat{u}(\theta) = \Gamma'^{-1}\left(\frac{1-\beta}{r}\frac{q(\theta)}{r+\delta+(1-\beta)q(\theta)}\right)$$

Puisque $\Gamma'^{-1}$ est croissant, $q$ est décroissant et l'argument de $\Gamma'^{-1}$ est croissant, $\hat{u}$ est décroissant, $\hat{u}(0) = \Gamma'^{-1}(1/r)$ et $\hat{u}(+\infty) = \Gamma'^{-1}(0)$. Le minimum de $\hat{u}$ est égal à $\Gamma'^{-1}(0)$. ■

La fonction $\hat{u}$ est la « *courbe d'offre* » des propriétaires. Elle dépend seulement de $\theta$ et pas de $R^e$. Par conséquent, à tout état stationnaire, la ville est dégénérée : tous les appartements procurent à leur locataire le même flux d'utilité $\hat{u}(\theta)$.

On est maintenant en mesure de définir les courbes analogues à (RB) et (FEW) qu'on note (RB') et (FEW'). D'abord, en tenant compte des décisions de construction *ex-ante* des propriétaires, la négociation *à la Nash* définit un loyer moyen qui s'obtient en appliquant (RB) à la ville $\hat{u}(\theta)$ :

$$\text{(RB')} \qquad R^e = K_1(\theta)(\hat{u}(\theta) - z + t) - t$$

Cette relation, notée (RB'), définit un lien entre $R^e$ et $\theta$. La seule différence avec (RB) est que $u^e$ dépend de $\theta$ ($u^e = \hat{u}(\theta)$. $K_1(\theta)$ et $\hat{u}(\theta) - z + t$ sont deux fonctions décroissantes et la courbe (RB') est donc décroissante depuis $R^e(\theta = 0) = \Gamma'^{-1}\left(\frac{1}{r}\right) - z$ jusqu'à $R^e(\theta = +\infty) = -t$.

En tenant compte que les travailleurs font face à une ville $\hat{u}(\theta)$, la nouvelle condition (FEW') de libre entrée des travailleurs est :

$$\text{(FEW')} \qquad R^e = \hat{u}(\theta) - z - l\,\frac{r + \delta + \lambda(\theta)}{\lambda(\theta)}$$

La relation (FEW') définit $R^e$ en fonction de $\theta$. C'est la somme d'une fonction bornée et décroissante de $\theta$ (*i.e.* $\hat{u}(\theta)$ et d'une fonction croissante de $\theta$

FIGURE A.1
***L'état stationnaire de long terme***

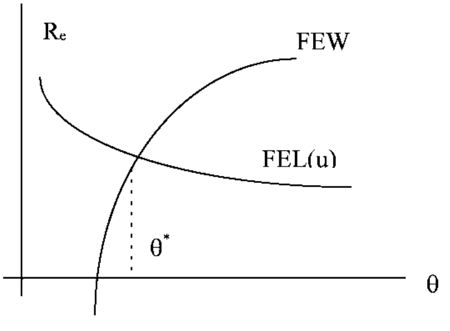
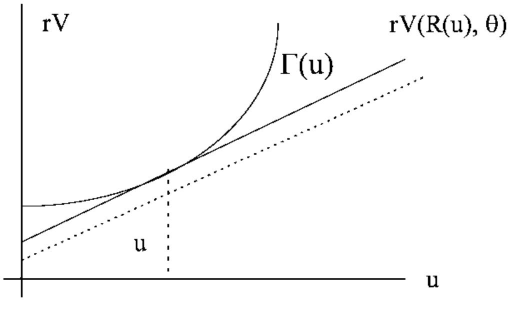



FIGURE A.2
***L'offre d'appartements de long terme***



($i.e.$ – 1 $\lambda(\theta)$ qui tend vers $-\infty$ en $\theta = 0$. La courbe (FEW') est donc croissante pour de petites valeurs de $\theta$. Mais elle peut être décroissante par la suite.

Par construction les valeurs $(\theta, R^e)$ d'un état stationnaire de long terme sont les coordonnées d'un point d'intersection des courbes (RB') et (FEW') (figure A.1). L'incertitude sur la forme de (FEW') laisse ainsi la possibilité d'états stationnaires multiples. La proposition ci-dessous donne des conditions suffisantes d'existence de l'état stationnaire de long terme.

PROPOSITION A.2. Sous les hypothèses 1 à 4 et sous la condition d'unicité (3.5), si :

$$\Gamma'^{-1}(0) - z + t > l$$

il existe au moins un état stationnaire de long terme $(\theta^*, R^e)$. Dans tout état stationnaire, tous les appartements sont identiques et peuvent trouver un locataire.

***Preuve***. Le lemme 3.4 implique que tous les appartements sont identiques et que chacun d'entre eux peut trouver un locataire si, et seulement si, $\hat{u}(\theta) - z + t > 0$, ce qui est vrai dès que $\hat{u}(\theta) \geqslant \Gamma'^{-1}(0)$ et $\Gamma'^{-1}(0) - z + t > 0$. Les calculs du cas de moyen terme montrent que (RB') est au dessus de (FEW') si et seulement si :

$$g\,(\theta) \overset{\text{déf}}{=} (\hat{u}(\theta) - z + t)\,[1 - K_2\,(\theta)] - l < 0$$

Les variations de cette expression sont ambiguës ($K_2(\theta)$ et $\hat{u}(\theta)$ sont décroissantes). Cependant on a

$$g(0) = -l < 0 \text{ et } g(+\infty) = \Gamma'^{-1}(0) - z + t - l > 0,$$

ce qui montre par continuité l'existence d'un point d'intersection. ■

Des résultats supplémentaires analysant les situations de multiplicité s'avéreraient intéressants. On n'en donne pas et on se contente des remarques informelles suivantes. Une condition suffisante d'unicité de l'état stationnaire de long terme est la monotonie de la courbe (FEW'). En particulier, la courbe (FEW') est croissante si les variations de $\hat{u}(\theta)$ sont faibles par rapport à celle de $1/\lambda\,(\theta)$. Informellement, c'est le cas quand $\Gamma''$ est bornée inférieurement, $i.e.$ $\Gamma$ est suffisamment convexe (des conditions précises restent cependant à déterminer). Il est alors immédiat que l'état stationnaire de long terme a les mêmes propriétés que celles d'un état stationnaire de moyen terme. Cette remarque se généralise de la façon suivante : si on considère un état stationnaire de long terme, unique ou non, se trouvant dans la partie croissante de (FEW') (on conjecture que c'est le cas le plus fréquent), on peut affirmer que, *sous les hypothèses de la proposition A.2, l'impact d'un changement des paramètres sur l'état stationnaire de long terme est exactement le même que sur celui de moyen terme.*

## A.6 Résolution de certaines ambiguités de statique comparative

Dans le moyen terme, quand (1) est vrai, l'équilibre est donné par :

$$R^e = RB\,(\theta)$$

$$R^e = FEW\,(\theta)$$

L'impact d'une variation de $r$ est :

$$dR^e = \frac{\partial}{\partial\theta} RB\,(\theta)\,d\theta + \frac{\partial}{\partial r} RB\,(\theta)\,dr$$

$$dR^e = \frac{\partial}{\partial\theta} FEW\,(\theta)\,d\theta + \frac{\partial}{\partial r} FEW\,(\theta)\,dr$$

*i.e.* :

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{\partial}{\partial\theta} RB(\theta) & 1 \\ -\dfrac{\partial}{\partial\theta} FEW(\theta) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta \\ dR^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} RB(\theta) \\ \dfrac{\partial}{\partial r} FEW(\theta) \end{pmatrix} dr$$

La formule de *Cramer* donne :

$$dR^e = \frac{\dfrac{\partial}{\partial\theta} FEW(\theta) \dfrac{\partial}{\partial r} RB(\theta) - \dfrac{\partial}{\partial r} FEW(\theta) \dfrac{\partial}{\partial\theta} RB(\theta)}{\dfrac{\partial}{\partial\theta} FEW(\theta) - \dfrac{\partial}{\partial\theta} RB(\theta}$$

Le dénominateur est positif et $dR^e$ a le signe du numérateur. Pour lever l'ambiguité de ce signe, on calcule :

$$\frac{\partial}{\partial r} FEW(\theta) = \frac{\partial u^e}{\partial r} - \frac{l}{\lambda}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} FEW(\theta) = \frac{\partial u^e}{\partial\theta} + \frac{\lambda'}{\lambda^2}\,(r+\delta)\,l$$

$$\frac{\partial}{\partial r} RB(\theta) = K_1 \frac{\partial u^e}{\partial r} + \frac{\partial K_1}{\partial r} u^e$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} RB(\theta) = K_1 \frac{\partial u^e}{\partial\theta} + \frac{\partial K_1}{\partial\theta} u^e$$

Avec $u^e$ constant (moyen terme), $dR^e$ a le même signe que :

$$\frac{\lambda'}{\lambda^2}\,(r+\delta)\,l \left(\frac{\partial K_1}{\partial r} u^e\right) + \frac{l}{\lambda}\left(\frac{\partial K_1}{\partial\theta} u^e\right) = \frac{\lambda'}{\lambda}\,(r+\delta)\,\frac{\partial K_1}{\partial\theta}$$

ou que :

$$\frac{\beta\left(\lambda-q\right)}{\left(r+\delta+q\right)^{2}}\frac{\lambda'}{\lambda}\left(r+\delta\right)-\frac{\beta\lambda'}{\left(r+\delta+q\right)}$$

ou que :

$$-\left(1-\frac{q}{\lambda}\right)(r+\delta)+(r+\delta+q)=\frac{q}{\lambda}(r+\delta)+q>0$$

L'effet est toujours positif.

L O U I S - J E A N
avenue d’Embrun, 05003 GAP cedex
Tél. : 04.92.53.17.00
Dépôt légal : 544 – Juillet 2000
Imprimé en France